Exponenciální a logaritmické funkce a rovnice

Exponenciální funkce se základem $a > 0$
je funkce $f(x) = a^x$ (mění se exponent).

(Připomenutí: mocninná funkce: x^n
($n \in \mathbb{N}$, nebo dokonce $n \in \mathbb{Z}$): x^2, x^3, x^{-1}.)

- $a = 10$: dekadická exp. fce
- $a = e$ (Eulerovo číslo $e \doteq 2{,}718281828\ldots$):
  exponenciála. ($e \notin \mathbb{Q}$).

Co to je a^x? $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$

- Jasné: $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{N}$ $a^2, a^7, \ldots$ víme co je.
- co když $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

  $a^{1/2} = \sqrt{a}$, $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$ atd.

$x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$

$$a^x = a^{p/q} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$$

$$2^{3/2} = \left(\sqrt{2}\right)^3.$$

- $x \in \mathbb{Q}$, $x < 0$, pak

  $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ a^{-x} víme, protože $-x \in \mathbb{Q}$, $-x > 0$.

Ale co je to a^x, kde $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
(tj. x je iracionální)

co je např. $2^{\sqrt{2}}$, 2^{π}?

$\pi = 3{,}141592653\ldots$

$\pi = 3,141592653\ldots$

$a_1 = 3$

$a_2 = 3,1$

$a_3 = 3,14$

$a_4 = 3,141$

$a_5 = 3,1415$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximuje π, tj. přesně řečeno $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pi$.

Zde: $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in \mathbb{Q}$.

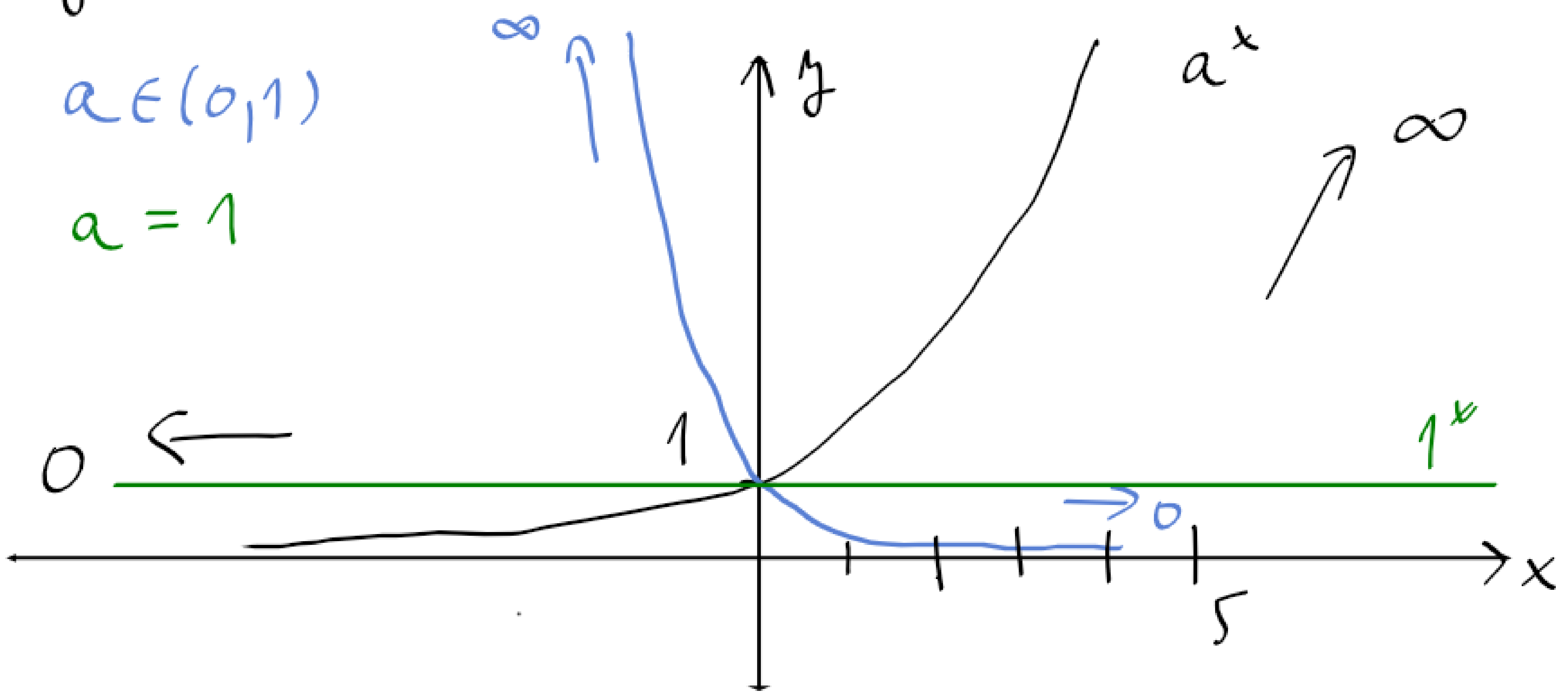
To znamená, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$: víme co je to 2^{a_n}

Definujeme $2^{\pi} := \lim\limits_{n\to\infty} 2^{a_n}$.

$a_n \to \pi$ (pro $n \to \infty$)

Tímto způsobem lze definovat a^x pro libovolné $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

graf: • $a > 1$, $f(x) = a^x$



$a = 10$

x	0	1	2	3	4	5
a^x	1	10	100	1000	10^4	10^5

Poznámka Lze definovat funkci e^x jako součet mocninné řady:

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \ldots$$

$$e^2 = 1 + 1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \ldots$$

Je-li definována e^x, lze exp. funkci se základem $a>0$ definovat:

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

Logaritmus: inverzní funkce k exponenciální fci

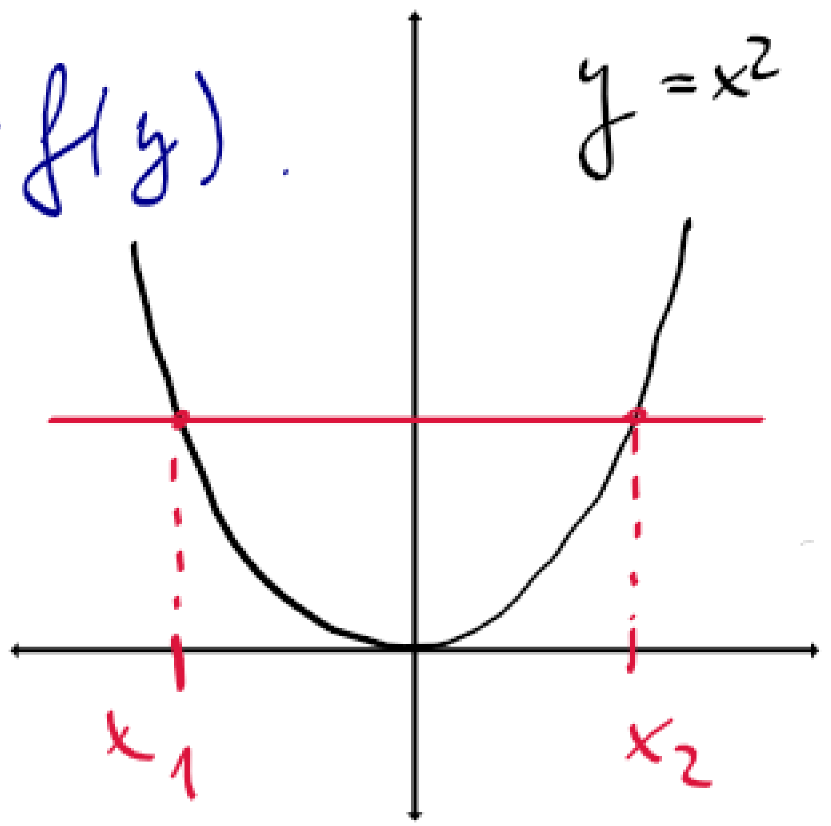
Pokud f je prostá funkce, můžeme definovat funkci inverzní k f (značíme f^{-1}), že f a f^{-1} „se vzájemně ruší".

Funkce $f: A \to \mathbb{R}$ je prostá $\overset{def.}{\iff}$

$$\forall x, y \in A: \ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

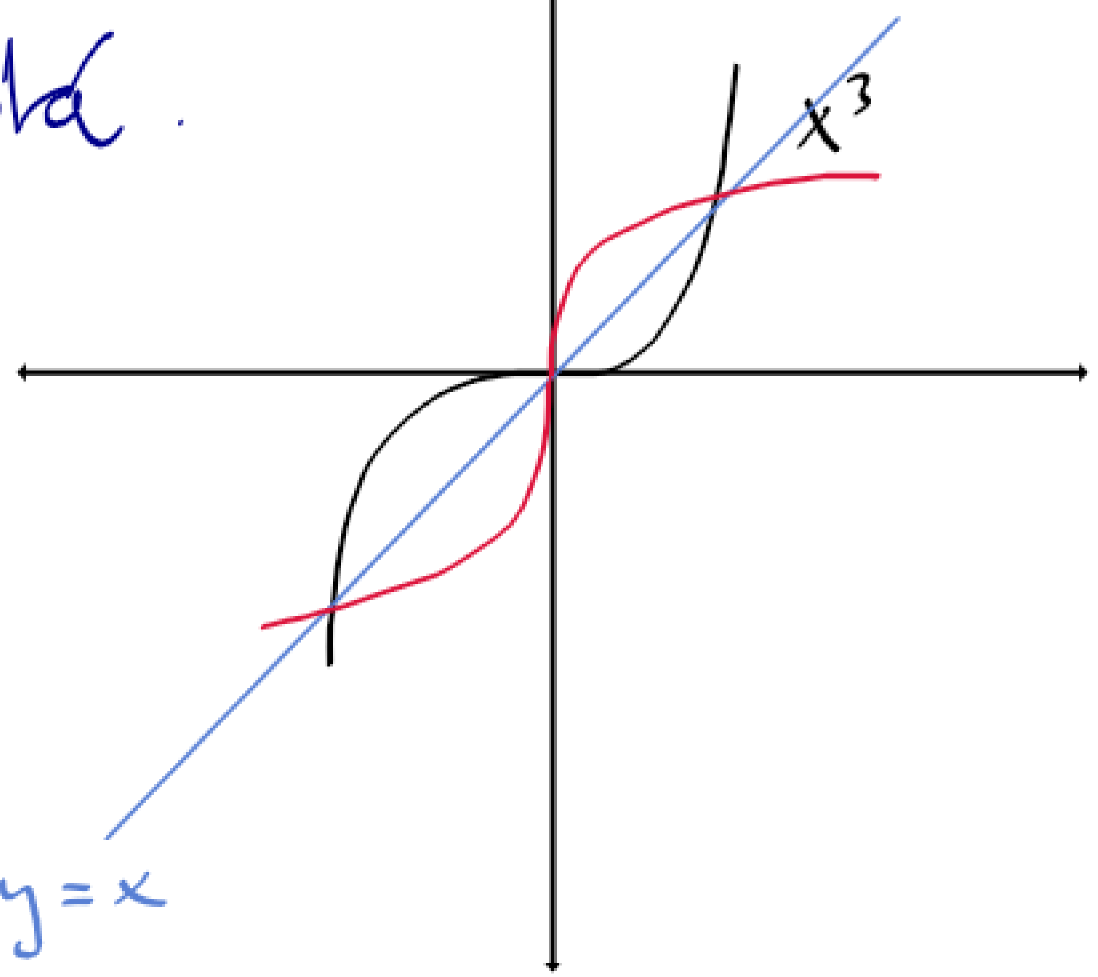
$$x_1 \neq x_2 \ \wedge \ x_1^2 = x_2^2$$

$$\Rightarrow y = x^2 \text{ není prostá.}$$



sin není prostá

funkce $y = x^3$ je prostá.



$f(x) = x^3$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(f^{-1}(x)) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$

$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$.

Pro exp. fci a^x $(a>0)$, $f(x) = a^x$:

Funkce $f(x) = a^x$ je prostá, a tedy existuje inverzní funkce $\log_a := f^{-1}$

$$\log_a(y) = f^{-1}(y).$$

$$y = a^x \qquad \log_a y = x$$

Tj. $\log_a(a^x) = x$ resp. $a^{\log_a y} = y$.

$y = a^x \overset{\text{def.}}{\iff} \log_a y = x$.

„log nám říká na kolikátou musím umocnit a, abych dostal y".

Příklady: $\log_2 16 = 4$, $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$.

$\log_{10} 1000 = 3$ atp. $\left(\frac{1}{100} = 10^{-2} \right)$

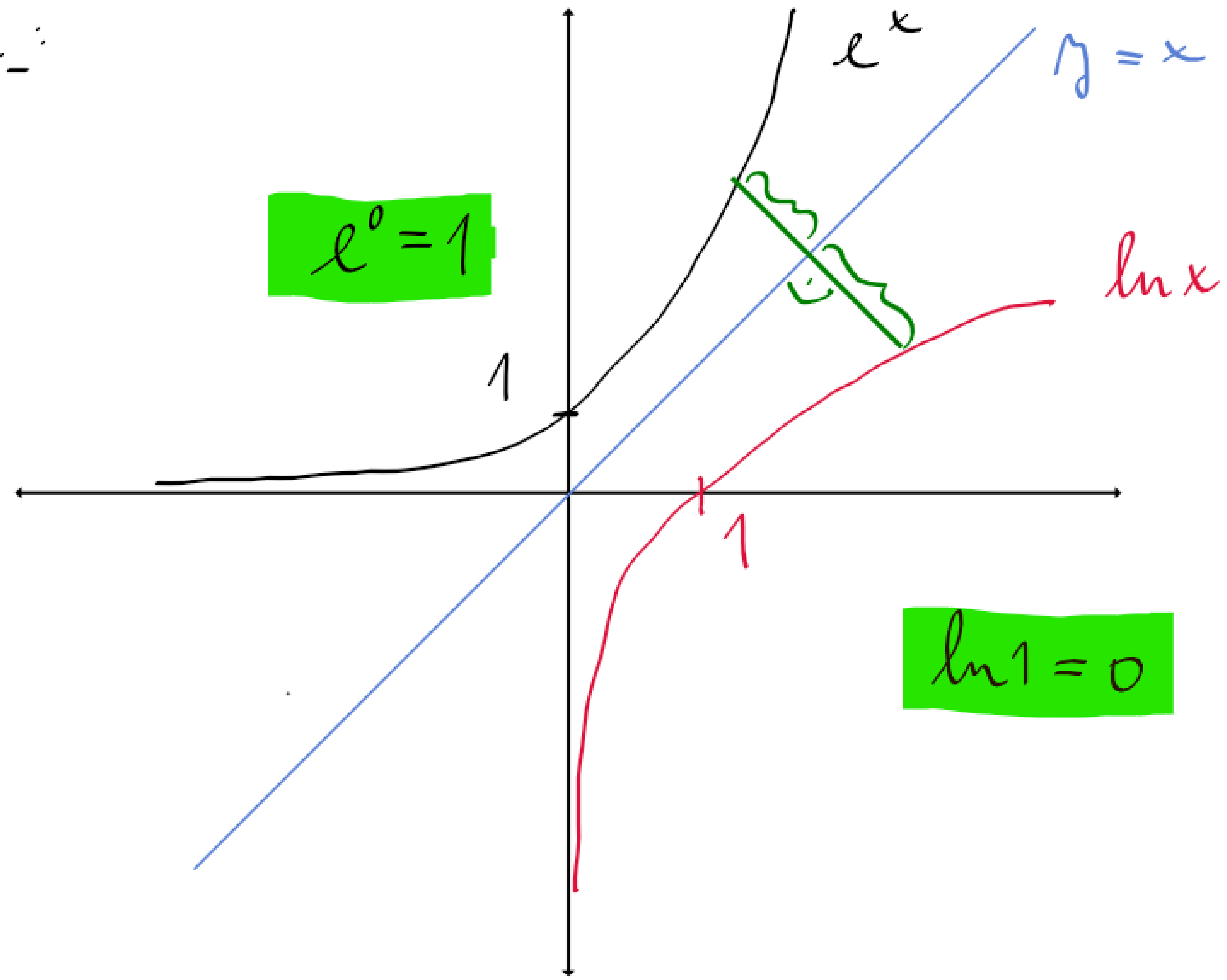
Vztah D_f a H_f pro f a f^{-1}:

$D_f = H_{f^{-1}}$ $\quad H_f = D_{f^{-1}}$.

Pro $f(x) = a^x$ máme $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (0, \infty)$.

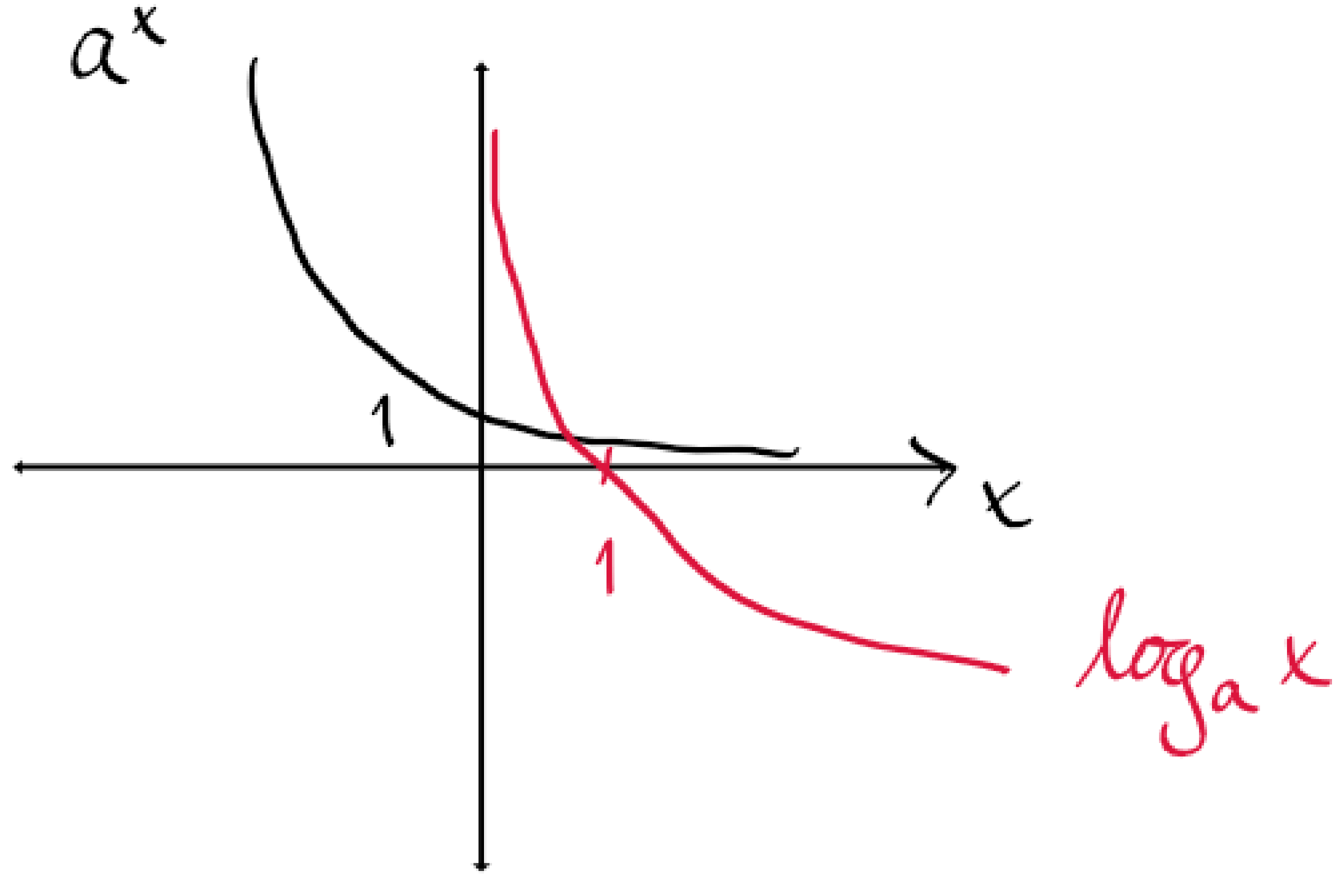
Tedy $D_{\log_a} = (0, \infty)$, $H_{\log_a} = \mathbb{R}$.

Grafy:



Přirozený logaritmus: $\ln := \log_e$.

$a \in (0,1)$



VZORCE:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{x\cdot y} = (a^x)^y = (a^y)^x$

VÍME

1) $\log_a(\alpha \cdot \beta) = \log_a \alpha + \log_a \beta$
2) $\log(\alpha^\beta) = \beta \cdot \log \alpha$
3) $\log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \log \alpha - \log \beta$

s libovolným základem

Dk 1):

$$a^{\log_a \alpha + \log_a \beta} = \underbrace{a^{\log_a \alpha}}_{\alpha} \cdot \underbrace{a^{\log_a \beta}}_{\beta} \overset{def.}{=} \alpha \cdot \beta \overset{def.}{=} \underbrace{a^{\log_a(\alpha \cdot \beta)}}_{\alpha \cdot \beta}$$

Ale a^x je prostá $\Longrightarrow$

$$\log_a \alpha + \log_a \beta = \log_a(\alpha \cdot \beta).$$

Další vzorce: podobný důkaz.

4) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$$e^{\ln x} = x = a^{\log_a x} \overset{def.}{=} e^{\log_a x \cdot \ln a}$$

z prostoty e^x: $(a \neq 1$, tj. $\ln a \neq 0)$

$$\ln x = \log_a x \cdot \ln a \Longrightarrow$$

$$\frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x.$$

Exponent může být i komplexní číslo:

$z \in \mathbb{C} \ \dots \ z = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R}, \ i = \sqrt{-1}.$

$$e^z = e^a \cdot (\cos b + i \sin b) \in \mathbb{C}$$

$$e^{i\pi} = -1 \quad (\text{„nejhezčí vzorec v M.“})$$

Euler

1. $f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ $\quad D_f = ?$

$[\log = \log_{10}]$. $\quad D_{\log} = (0,\infty)$.

$$D_f = \left\{x\in\mathbb{R} : \frac{x-1}{x+1} > 0\right\} =$$

$$= \left\{x\in\mathbb{R} : \frac{x-1}{x+1} > 0 \wedge x \neq -1\right\}.$$

$$\frac{x-1}{x+1} > 0 \iff (x-1>0 \wedge x+1>0) \vee (x-1<0 \wedge x+1<0)$$

$$\iff (x>1 \wedge x>-1) \vee (x<1 \wedge x<-1)$$

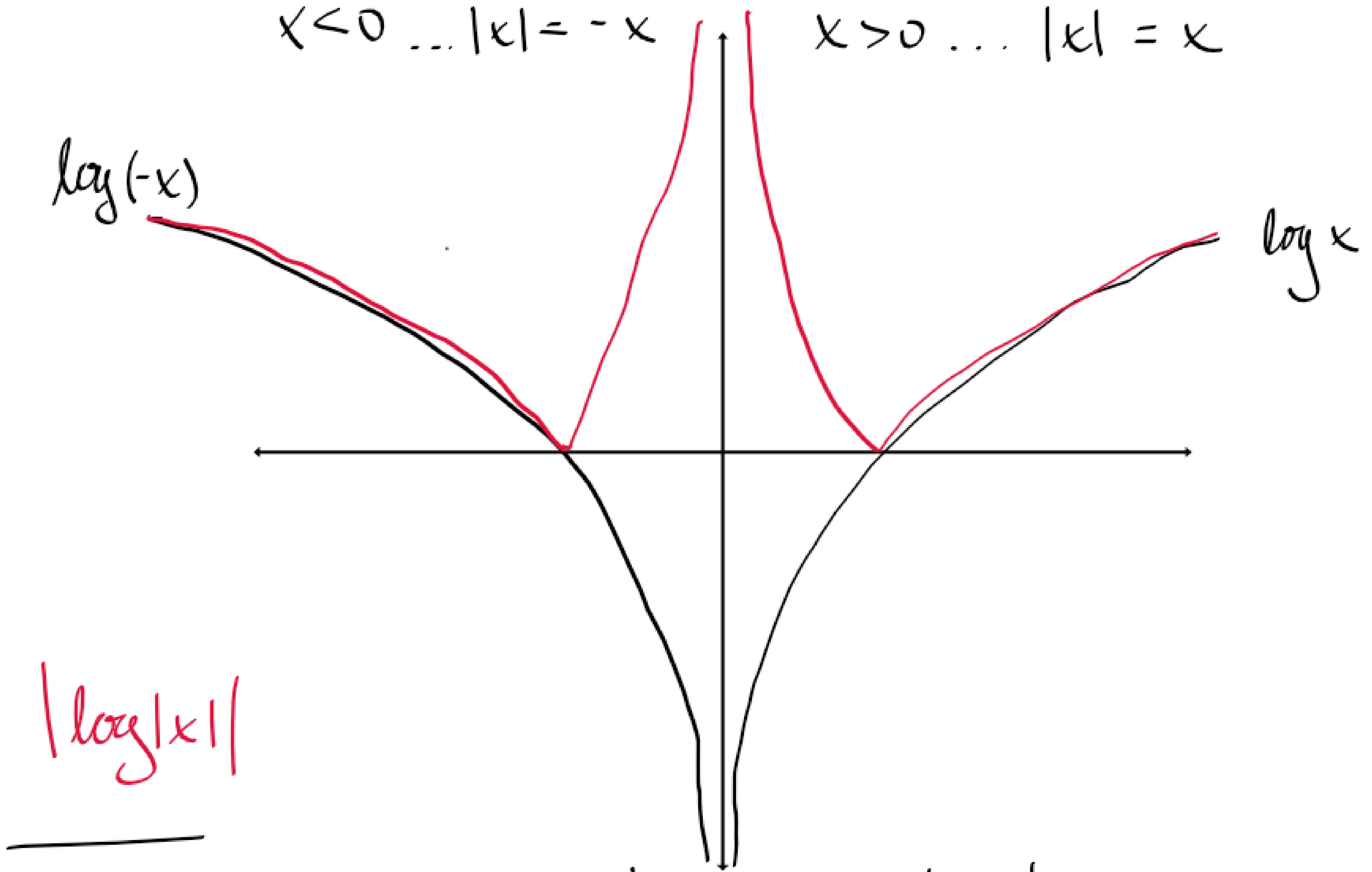
$$\iff x>1 \vee x<-1.$$

$$D_f = (-\infty,-1)\cup(1,\infty).$$

2. načrtněte graf fce $f(x) = |\log|x||$

$$D_f = \{x\in\mathbb{R} : |x|>0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,\infty).$$

$\log|x|$



Podobně $f(x) = |||x|-1|-1|-1|$

atd..

(3.) Řešte rovnici

$$3^x + 3^{x+1} - 5^{x+1} = 5^x - 3^{x+3} + 5^{x+2}$$

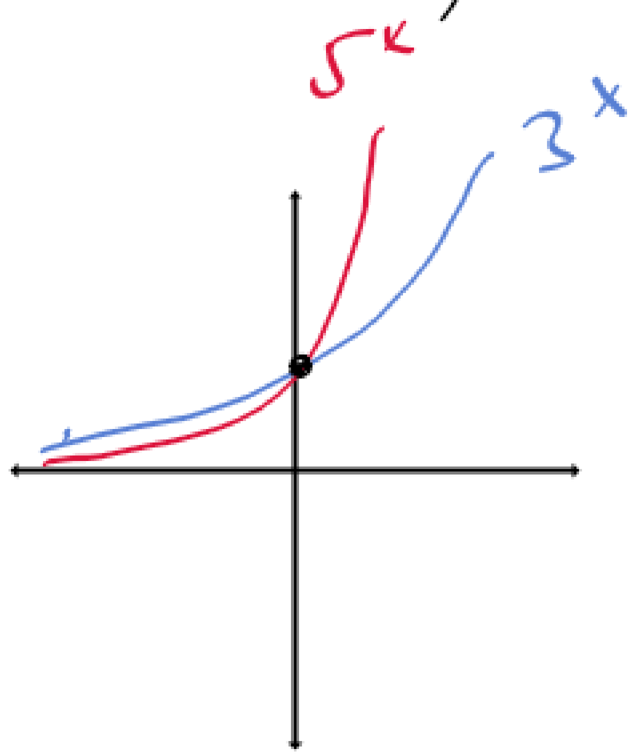
$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+3} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$$

$$3^x + 3\cdot 3^x + 3^3\cdot 3^x = 5^x + 5\cdot 5^x + 5^2\cdot 5^x$$

$$3^x(1+3+27) = 5^x(1+5+25)$$

$$\cancel{31}\cdot 3^x = \cancel{31}\cdot 5^x$$

$$3^x = 5^x$$



$$\frac{3^x}{5^x} = 1$$

PROSTÁ $\longrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1 = \left(\frac{3}{5}\right)^0$

$$x = 0$$

(4.)

$$\frac{2^{x+3}\cdot 3^{x+2}}{6^{7-x}\cdot 8^{x-1}} = \frac{9^{x-2}}{3} \quad /\cdot 8^{x-1}$$

$$(2\cdot 3)^{x-7}\cdot 2^{x+3}\cdot 3^{x+2} = 3^{-1}\cdot 3^{2x-4}\cdot 2^{3x-3}$$

$$2^{2x-4}\cdot \cancel{3^{2x-5}} = \cancel{3^{2x-5}}\cdot 2^{3x-3}$$

$$2^0 = 1 = 2^{x+1}$$

PROSTOTA $\Rightarrow 0 = x+1 \Rightarrow x = -1$.

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

$$(a\cdot b)^\alpha = a^\alpha\cdot b^\alpha$$

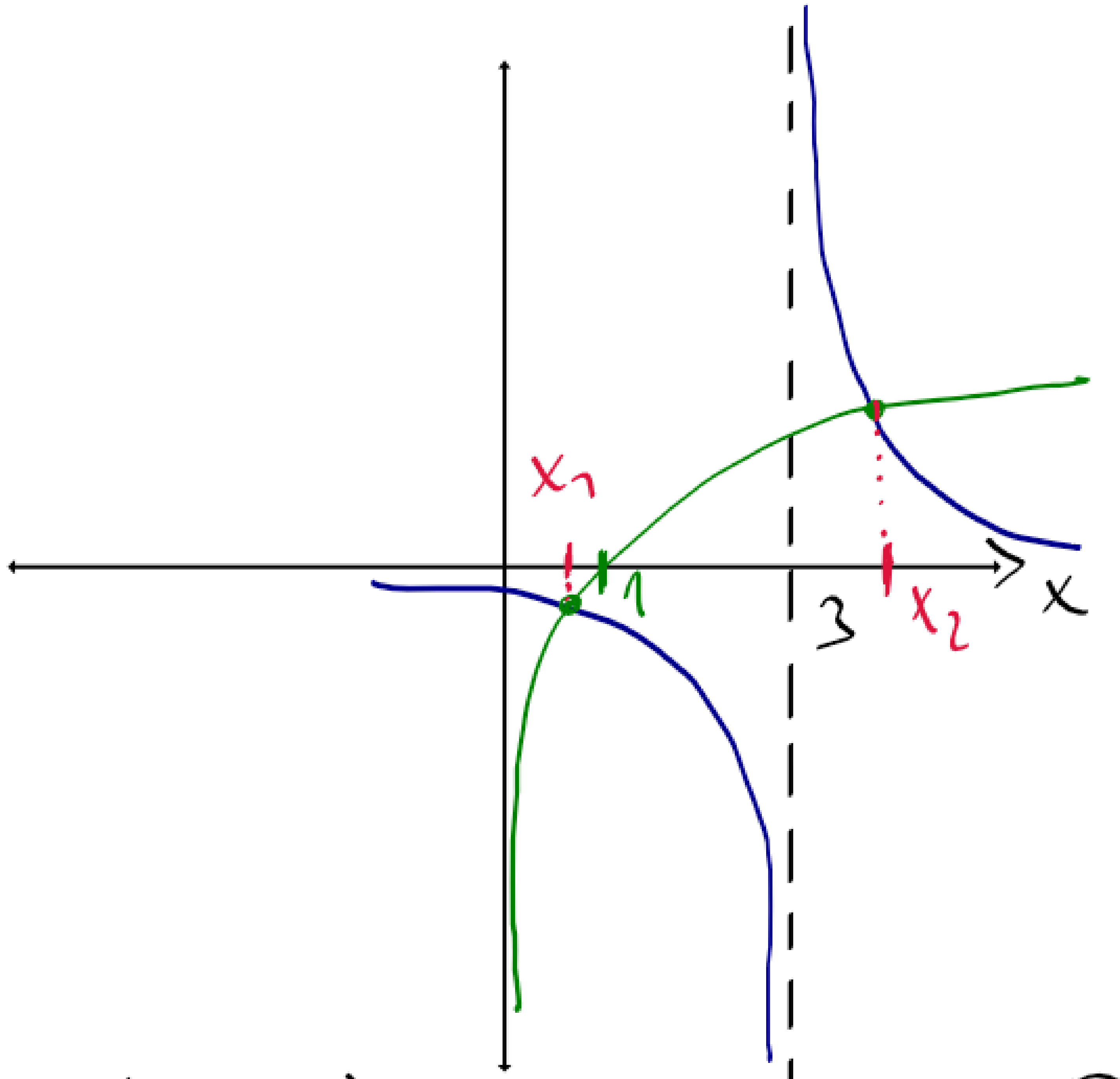
(5.) $x^{x+3} = 10\,x^6 \qquad \dots \quad [x = 0]$

$x^{x-3} = 10 \qquad / : x^6 \;,\; x \neq 0$

$e^{(x-3)\cdot \ln x} = e^{\ln 10}$

$(x-3)\cdot \ln x = \ln 10$

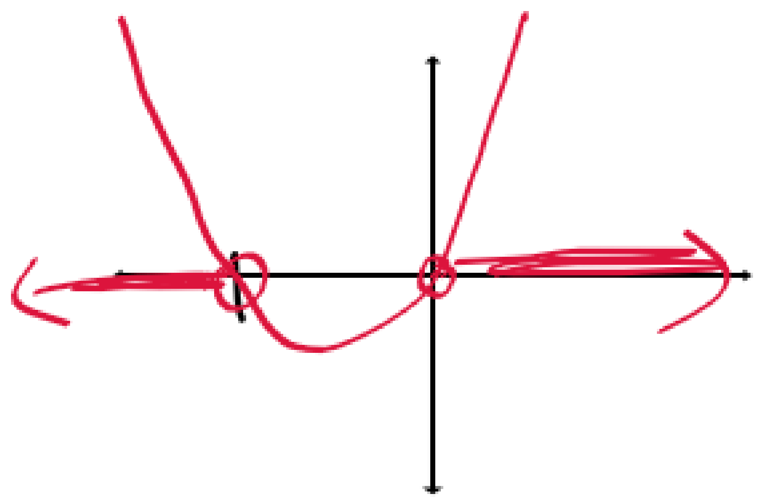
$\underline{\underline{\ln x}} = \dfrac{\ln 10}{x-3}$



(6.) Řešte nerovnici $\log_2(x^2+2x) < 3$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Podmínky: $x^2+2x > 0$

$x\cdot(x+2) > 0$



$x \in (-\infty,-2) \cup (0,\infty)$

$\log_2(x^2+2x) < 3 \qquad (2^3 = 8)$

$\log_2(x^2+2x) < \log_2 8$

[$\log_2$ je rostoucí funkce. Tedy
$\log_2 x_1 < \log_2 x_2 \iff x_1 < x_2$.]

$x^2+2x < 8$

$x^2+2x-8 < 0$

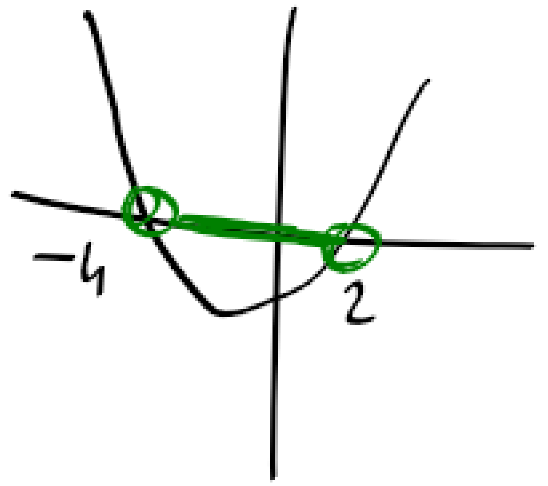
$(x+1)^2 < 3^2$

$|x+1| < 3$

$x \in (-4, 2)$

$x^2+2x-8 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = -1 \pm 3 \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$



Celkem:

$x \in \big((-\infty,-2) \cup (0,\infty)\big) \cap (-4,2) =$

$= (-4,-2) \cup (0,2)$.

(7)

$$3^{\log x} + 5^{\log y} = 14$$
$$3^{2\log x} - 5^{2\log y} = 56$$

$x, y \in \mathbb{R}$.

Substituce: Jak říkáme?

a) $\log x = t \qquad \log y = u$

$$3^t + 5^u = 14$$
$$3^{2t} - 5^{2u} = 56 \quad \ldots$$

b) $3^{2\log x} = 3^{\log x + \log x} = 3^{\log x} \cdot 3^{\log x} = \left(3^{\log x}\right)^2$

$5^{2\log y} = \left(5^{\log y}\right)^2$

$t = 3^{\log x} \qquad u = 5^{\log y}$

INKODO

$$t + u = 14 \qquad (1)$$
$$t^2 - u^2 = 56 \qquad (2)$$

(2) $(t-u)(t+u) = 56$

$(t-u) \cdot 14 = 56$

$t - u = \frac{56}{14} = 4$

$\left.\begin{array}{l} t+u=14 \\ t-u=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2t = 18, \; t = 9 \\ 9 - u = 4, \; u = 5 \end{array}$

$3^{\log x} = 9 = 3^2$

$\log x = 2$

$\underline{\underline{x = 100}}$

$5^{\log y} = 5$

$\log y = 1$

$\underline{\underline{y = 10}}$